大连理工大学应用数学研究所 徐利治 手稿---计算组合数学中的两种互反变换---19页

刊号：

《清华大学学报》
《清华大学科学报告》稿件校对登记卡

题　目：计算组合数学中的两种互逆变换

作者签名：徐利治　　　　作者联系电话及住址：

责任编辑：金

项　目	代作者校签	作者校签	编辑部校签
底　图			
错　图			
贴　字			
文　整			
英文摘要			
注字号			
拼　版			
一　校	[illegible]		先[illegible] ~~[illegible]~~
二　校			白 ~~[illegible]~~ 5.27
三　校			

填表说明：

1. 为了保证出版质量，明确责任，必须严肃认真填写此表
2. 作者对文章原稿、原图、英文摘要要仔细校对，签字后，不得再修改，尤其要保证原图准确无误。
3. 表格中的一、二、三校，只是对印刷错误的校对，不得加进原稿没有的内容和文字。

计算组合数学中的两种互反变换

献给赵访熊老师80周岁寿辰

徐利治

大连理工大学应用数学研究所

五宋　　小五号

摘要　本文研究了具有普遍形式的两种互反级数变换。一种是利用互反函数构成的广义

$$y_n=\sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)\,x_k \Longleftrightarrow x_n=\sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)\,y_k \qquad (1)$$

其中 $n\in Z_+$（非负整数集），而 $\{S_1(n,k)\}$ 与 $\{S_2(n,k)\}$ [redacted] 指数型生成函数（[illegible]函数）

$$\frac{(\log(1+t))^k}{k!}=\sum_{n\ge 0} S_1(n,k)\frac{t^n}{n!},\qquad \frac{(e^t-1)^k}{k!}=\sum_{n\ge 0} S_2(n,k)\frac{t^n}{n!}$$

注意生成函数中的 $\phi(t)=\log(1+t)$ 与 $\psi(t)=e^t-1$ 恰好构成一对互反函数，即 $\phi(\psi(t))=\psi(\phi(t))=t$，$\phi(0)=\psi(0)=0$。因此不难想到，应该可以利用形式幂级数环 $\Gamma\equiv(\Gamma,+,\cdot)$ 中的任意一对元素 $f,g\in\Gamma$，通过指数型发生函数

$$\frac{1}{k!}(f(t))^k=\sum_{n\ge 0} A_1(n,k)\frac{t^n}{n!},\qquad \frac{1}{k!}(g(t))^k=\sum_{n\ge 0} A_2(n,k)\frac{t^n}{n!}$$

来界定一种广义 Stirling 数偶（GSN 偶）$\{A_1(n,k),A_2(n,k)\}$ 的概念。[redacted] 只要假设 f,g 恰好形成一对互逆元素，即 $f\circ g=g\circ f=e$，$f(0)=g(0)=0$，这里 e 为单位元素，即 $e(t)\equiv t$，又 $f\circ g(t)=f(g(t))$。

[redacted] $\{A_1(\cdot,\cdot),A_2(\cdot,\cdot)\}$ 作成一个 GSN 偶的必要与充分条件是下列互反关系式成立[1]：

$$y_n=\sum_{k\ge 0} A_1(n,k)\,x_k \Longleftrightarrow x_n=\sum_{k\ge 0} A_2(n,k)\,y_k \qquad (2)$$

假设$\{p_n(t)\}$与$\{q_n(t)\}$是两个正规多项式列，相应的基本算子分别为P与Q. 则作为[redacted](1)的拓广还有如下形式的一对互反关系式[2] [redacted]

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \left(Q^k p_n(t)/k!\right)_{t=0} \cdot x_k \qquad [redacted](3)$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(P^k q_n(t)/k!\right)_{t=0} \cdot y_k \qquad [redacted](4)$$

特别，如取 $p_n(t)=t^n$, $q_n(t)=(t)_n=t(t-1)\cdots(t-n+1)$, $P=D=d/dt$, $Q=\Delta$（单位步长的差分算子），则[redacted](3)$\Leftrightarrow$[redacted](4)便化归[redacted](1).

本文的[redacted]前一部[redacted]分，将建立一个普遍反演定理，它包括[redacted](2)[redacted]~[redacted](4)作为其特例. 为此，需要将基本算子与多项式正规列等概念作适当

第一[redacted]部分．是将我们早先得到的一类反射级数关系[3][redacted]以及 L. Carlitz 利用 Gauss q-系数作出的某种类比结果[4][redacted]，纯一成同一模式．这里用到的证明方法受到[redacted]文[5]中[redacted]证法技巧的启发．限于篇幅，本文将不讨论文中结果在计算组合数学中的种种应用．

2 [redacted] 广义 Stirling 互反变换

本节所讨论对象都属于形式幂级数环 Γ，故有关加法、乘法、求导（求微商）等运算均遵循形式算法规则[6][redacted]

[redacted]定义下列概念．

定义 1 称 $\{p_n(t)\}$ 为一正规的基本多项式列，如果 $\deg p_n(t)=n$，$p_0(t)\equiv 1$，$p_n(0)=0$ $(n\geq 1)$，而且环 Γ 中的零元素 $\mathbf{0}=0+0t+0t^2+\cdots$ 当表示成线性和式

$$\mathbf{0}=\sum_{k\geq 0}c_k p_k(t)$$

时，就只能有 $c_k=0$，$(k=0,1,2,\cdots)$．

例如，$p_0=0$，$p_1(t)=t$，$p_k(t)=t^k/k-t^{k-1}/(k-1)$，$(k=2,3,\cdots)$ 虽为正规列，但并非基本列，因为可以有 $\mathbf{0}=\sum_{k\geq 0}p_k(t)$．

定义 2 一个线性算子 P 称为联系于正规

…对 $\{p_n(t)\}$ 的基本算子，如果 $Pp_0(t)=0$, $Pp_n(t)=np_{n-1}(t)$, $(n\geq 1)$，而且对 Γ 中每一元素 $\sum_0^\infty c_k p_k(t)$ 有

$$P\sum_0^\infty c_k p_k(t)=\sum_1^\infty k c_k p_{k-1}(t).$$

因 Γ 的元素表成基本列的线性和时必唯一，故算子 P 由如上形式结果一意确定。

定义3 设 $\sigma=\{p_n(t)\}$ 与 $\tau=\{q_n(t)\}$ 是两个正规基本多项式列。又设 $\phi,\psi\in\Gamma$ 且 $\phi(0)=\psi(0)=0$。如果成立如下的形式展开式

$$p_k(\phi(t))=\sum_{n\geq 0}A_1(n,k)\,q_n(t) \qquad (5)$$

$$q_k(\psi(t))=\sum_{n\geq 0}A_2(n,k)\,p_n(t) \qquad (6)$$

那么 $\{A_1(\cdot,\cdot),A_2(\cdot,\cdot)\}$ 就叫作由 $\sigma,\tau,\{\phi,\psi\}$ 产生的广义 Stirling 数偶（GSN偶），当且仅当 ϕ,ψ 为 Γ 中的互逆元素，即 $\phi\circ\psi=\psi\circ\phi=e$ 时。

在建立一般定理之前，先须证明下列引理

引理1 按(5)•(6)定义的 $\{A_1(\cdot,\cdot),A_2(\cdot,\cdot)\}$ 成为GSN偶的必要与充分条件是如下的形式反演关系恒成立

$$y_n=\sum_{k\geq 0}A_1(n,k)\,x_k \qquad (7)$$

$$x_n=\sum_{k\geq 0}A_2(n,k)\,y_k \qquad (8)$$